Warnhinweis

Bei diesen „Lösungen“ handelt es sich um Lösungsskizzen, Ansätze und Endergebnisse. Die „Lösungen“ können nicht als Muster für Klausur-Lösungen angesehen werden. Außerdem wurden die „Lösungen“ nicht noch einmal auf ihre Richtigkeit kontrolliert und können Fehler enthalten.

Diese „Lösungen“ dienen lediglich zum Abgleich eurer Ergebnisse. Wenn ihr unsicher seid, fragt lieber noch einmal nach.

Topologie und Stetigkeit -Lösungen-

1. Aufgabe:

Es sei $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ gegeben durch:

$$||(x,y)|| := |y| + |3x - 2y|$$

Untersuche, ob dadurch eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.
Lösung:

1. Es ist $||(0,0)|| = |0| + |3\cdot 0 - 2\cdot 0| = 0$. Somit ist die Implikation $x = 0 \Rightarrow ||x|| = 0$ gezeigt.
   Sei nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(x,y)|| = 0$. Dann ist
   $$|y| + |3x - 2y| = 0$$
   Da $|y| \geq 0$ und $|3x - 2y| \geq 0$ folgt
   $$|y| = 0, |3x - 2y| = 0$$
   Somit ist $y = 0$ und $3x - 2y = 0$, also $x = 0$. Somit ist die Implikation $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ gezeigt.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann ist:
   $$\begin{aligned} ||\alpha\cdot(x,y)|| = ||(\alpha\cdot x, \alpha\cdot y)|| &= |\alpha\cdot y| + |3\cdot\alpha\cdot x - 2\cdot\alpha\cdot y| \\ &= |\alpha|\cdot|y| + |\alpha|\cdot|3x - 2y| \\ &= |\alpha|\cdot(|y| + |3x - 2y|) \\ &= |\alpha|\cdot||(x,y)|| \end{aligned}$$
3. Seien $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann ist
   $$\begin{aligned} ||(x_1,x_2) + (y_1,y_2)|| &= ||(x_1 + y_1, x_2 + y_2)|| \\ &= |x_2 + y_2| + |3(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2)| \\ &= |x_2 + y_2| + |3x_1 - 2x_2 + 3y_1 - 2y_2| \\ &\leq |x_2| + |y_2| + |3x_1 - 2x_2| + |3y_1 - 2y_2| \\ &= |x_2| + |3x_1 - 2x_2| + |y_2| + |3y_1 - 2y_2| \\ &= ||(x_1,x_2)|| + ||(y_1,y_2)|| \end{aligned}$$
   Bei der Abschätzung wurde die Dreiecksungleichung in den reellen Zahlen (Proposition 3.1.5.) verwendet.

Nach Definition 9.1.1. handelt es sich um eine Norm.

2. Aufgabe:

Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ offen/ abgeschlossen/beschränkt (bezüglich der euklidischen Norm) sind. Gib außerdem zu jeder Menge die Menge aller Randpunkte und das Innere an. Skizziere die Mengen A, B, C, D, E.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_1 \leq 2\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0\} \cup \{(2,3)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq ||x||_2 < 4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_\infty < 3\}$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 + 4x - 5 \geq 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_4 = 16\}$. Dabei ist $||x||_4 := \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4}$

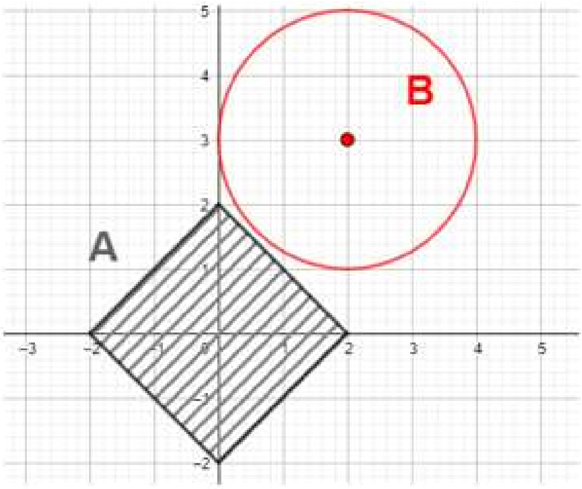
g) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, x^2 + y^2 - z \leq -5\}$

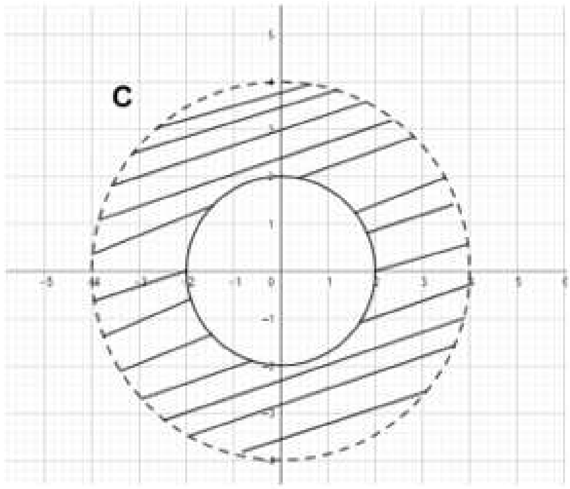
h) $H = \mathbb{R}^3$

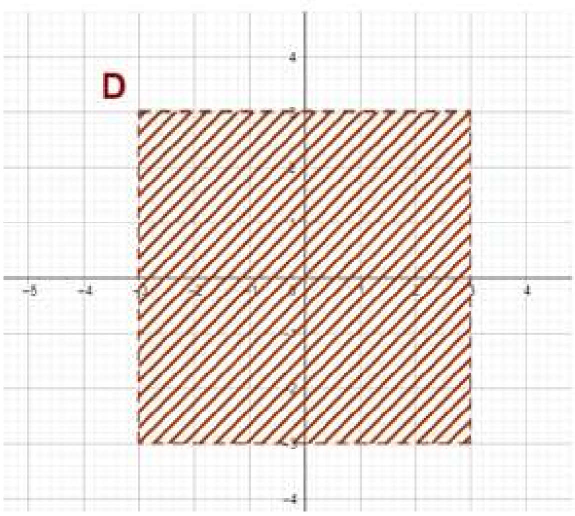
Lösung:

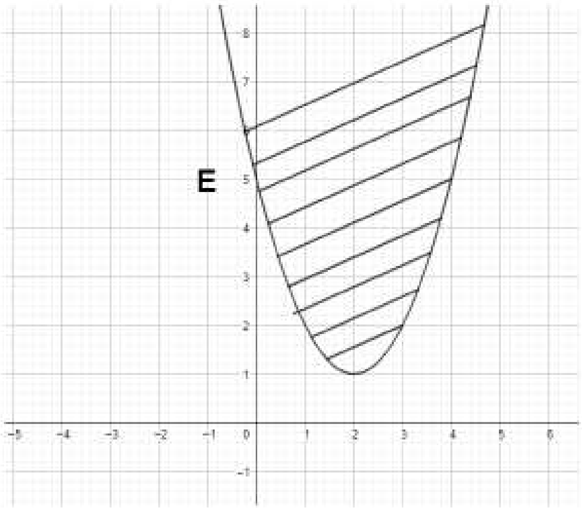
Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	Randpunkte	Inneres
A	nein	ja	ja	$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_1 = 2\}$	$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_1 < 2\}$
B	nein	ja	ja	B	$\emptyset$
C	nein	nein	ja	$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2 = 2\} \cup$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2 = 4\}$	$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < ||x||_2 < 4\}$
D	ja	nein	ja	$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_\infty = 3\}$	D
E	nein	ja	nein	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 + 4x - 5 = 0\}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 + 4x - 5 > 0\}$
F	nein	ja	ja	F	$\emptyset$
G	nein	ja	nein	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = -5\}$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z < -5\}$
H	ja	ja	nein	$\emptyset$	H

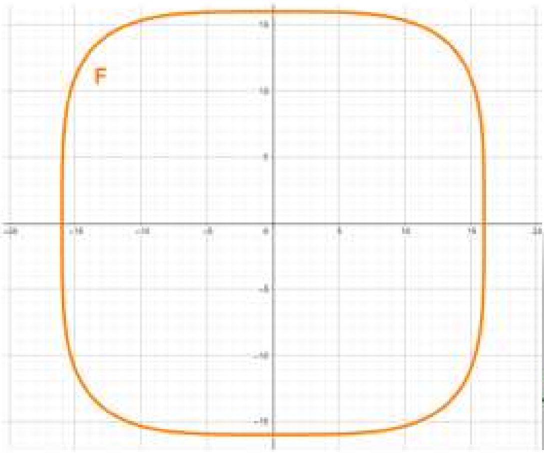
Es ist $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4\} \cup \{(2,3)\}$. Man erkennt einen Kreis mit Mittelpunkt $(2,3)$. Weiter ist $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x-2)^2 + 1\}$. Somit erhält man:

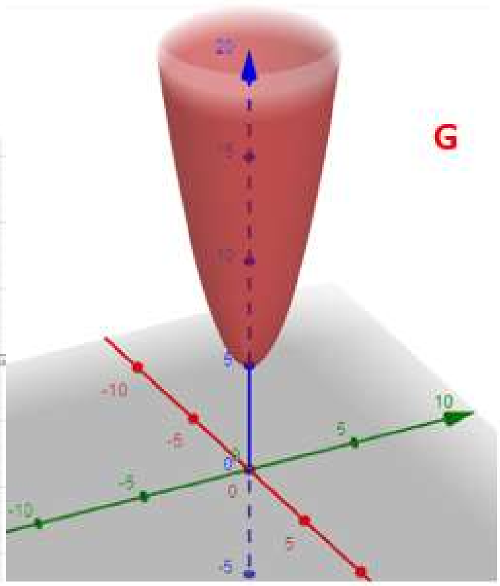












3. Aufgabe:

Untersuche, in welchen Punkten die im Folgenden gegebenen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ stetig bzw. unstetig sind!

a) $f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0 & (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$

b) $g(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^6} & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$

Lösung:

a) In allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Funktion stetig nach Stetigkeitssätzen.

Weiter ist

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{1}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{x_2^2}{x_1^3}} = 0$$

denn: $\lim_{x_1\to+0} \frac{1}{x_1} = \infty, \lim_{x_1\to+0} \dfrac{x_2^2}{x_1^3} \geq 0$

und

$\lim_{x_1\to-0} \frac{1}{x_1} = -\infty, \lim_{x_1\to-0} \dfrac{x_2^2}{x_1^3} \leq 0$

(somit erhält man entweder 1 durch Unendlich oder 1 durch Minus Unendlich, was beides gegen Null geht.)

Somit ist die Funktion stetig in $(0,0)$.

b) In allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Funktion stetig nach Stetigkeitssätzen.

Sei $x_1 = x_2^3$.

Dann ist $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^6} = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{x_2^3 x_2^3}{x_2^6 + x_2^6} = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{x_2^6}{2x_2^6} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ Somit ist die Funktion an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

4. Aufgabe:

Untersuche, ob der folgende Grenzwert existiert.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2)}{x^2 + y^2}$$

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(x^2) \leq x^2$. (Für kleine x gilt das aufgrund der Beziehung $sin(x) \leq x$ sowieso (wurde im ersten Semester gezeigt.))
Es ist dann

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{y\sin(x^2)}{x^2 + y^2}| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{yx^2}{x^2 + y^2}| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{y}{1 + \frac{y^2}{x^2}}| = 0$$

Somit ist der Grenzwert 0.

Integralrechnung

1. Aufgabe: (*Riemann-integrierbare Funktionen*)

Begründen Sie nur kurz, welche der folgenden Funktionen f auf den angegebenen Intervallen Riemann-integrierbar sind.

- ☐ $f(x) = \min(x, x^2)$ ist auf dem abgeschlossenen Intervall $[-5, 5]$ stetig als Minimum über stetige Funktionen. Damit ist es Riemann-integrierbar
- ☐ $f(x) = |x|$ ist stetig auf dem abg. Intervall $[-10, e]$ und damit Riemann-integrierbar
- ☐ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[-2, 2]$ ist nicht Riemann-integrierbar, da der Integrand nicht nur an einer isolierten Definitionslücke nicht existiert, sondern über das halbe Intervall
- ☐ $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ -1, & x \leq -1 \end{cases}$ ist eine stückweise stetige Funktion auf $[-10, 10]$ und damit Riemann-integrierbar (Linearität)

2. Aufgabe:

Beweisen Sie, dass die Funktion $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^4)e^{-t}dt$$

monoton steigend ist.

Lösung: Der Integrand $\cos(t^4)e^{-t}$ ist stetig auf $(0, 1)$. Somit besitzt das Integral eine Stammfunktion $G(t)$ mit $G'(t) = \cos(t^4)e^{-t}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $g(x) = G(t)|_0^{x^2} = G(x^2) - G(0)$. Da G und x^2 differenzierbar sind, gilt das auch für g mit

$$g'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = \cos(x^8)e^{-x^2} \cdot 2x$$

Sowohl die cos-Funktion, als auch die Exponentialfunktion und $2x$ sind im Intervall $(0, 1)$ positiv und daher auch $g'(x) > 0, x \in (0, 1)$. Damit ist g monoton steigend.

3. Aufgabe:

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie Stammfunktionen von $\sin(n \cdot x) \cdot \cos(m \cdot x)$ auf $\mathbb{R}$.

Lösung: Mit zweifacher partieller Integration erhält man für $n \neq m$

$$\int_a^b \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{\sin(nx)\sin(mx)}{m}\Big|_a^b - \frac{n}{m}\int_a^b \cos(nx)\sin(mx)dx$$

$$= \frac{\sin(nx)\sin(mx)}{m} + \frac{n\cos(nx)\cos(mx)}{m^2}\Big|_a^b - \frac{n^2}{m^2}\int_a^b \sin(nx)\cos(mx)dx$$

Wenn man das Integral auf beiden Seiten addiert und durch $(1 - n^2/m^2)$ teilt, erhält man

$$\int_a^b \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{m\sin(nx)\sin(mx)}{m^2 - n^2} + \frac{n\cos(nx)\cos(mx)}{m^2 - n^2}\Bigg|_a^b$$

Damit ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ folgende Funktion eine Stammfunktion

$$F_c(x) = \frac{m\sin(nx)\sin(mx)}{m^2 - n^2} + \frac{n\cos(nx)\cos(mx)}{m^2 - n^2} + c$$

Für $n = m$ ergibt sich mit partieller Integration

$$\int_a^b \sin(nx)\cos(nx)dx = \frac{\sin(nx)^2}{n}\Bigg|_a^b - \int_a^b \cos(nx)\sin(nx)dx$$

Wenn man das Integral auf beiden addiert und durch 2 teilt, erhält man die Stammfunktionen in der Form

$$F_c(x) = \frac{\sin(nx)^2}{n} + c$$

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(7) = 10, f(2) = 5, f'(7) = 3$. Berechnen Sie

$$\int_2^7 f''(t) \cdot (2t - 4)dt$$

Lösung: Mit partieller Integration erhält man

$$\int_2^7 f''(t)\cdot(2t-4)dt = f'(t)(2t-4)|_2^7 - 2\int_2^7 f'(t)dt = f'(t)(2t-4) - 2f(t)|_2^7 = 10f'(7) - 2f(7) + 2f(2) = 20$$

c) Die bijektiven und differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$, definieren eine Funktion $h(x) = f(g(x))g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mit der Stammfunktion H. Zeigen Sie mit der Substitution $u = g^{-1}(x)$ die Beziehung

$$\int_a^b f(x)dx = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a)) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Lösung: Substituiere $u = g^{-1}(x)$, also $x = g(u)$. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$\frac{du}{dx} = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(u)} \Rightarrow g'(u)du = dx$$

Das Integral ergibt sich zu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} h(u)du = H(u)|_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a))$$

4. Aufgabe:

Bestimmen Sie mit Hilfe von Substitution, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}dx$$

Lösung: Substituiere $u = \ln(x) \Rightarrow e^u = x$ mit $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^u} \Rightarrow e^u du = dx$. Es ergibt sich

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\ln(b)} \frac{1}{u^\alpha} du$$

Für $\alpha = 1$ ergibt sich somit

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \ln(u)|_1^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln(b))$$

Dieser Grenzwert existiert nicht. Für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \left. \frac{-u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty} \frac{1 - \ln(b)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Dieser Grenzwert existiert für $\alpha > 1$ und nimmt den Wert $1/(1-\alpha)$ an. Für $\alpha < 1$ existiert der Grenzwert nicht.

Mathenacht Lösungen

Donnerstag, 30. Juni 2022 10:20

Warnung: Notationen können von der Vorlesung abweichen

A 1

Untersuche die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, Existenz der part. Ableitungen und totale Diffbarkeit mit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ + Berechne ∇f auf $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

L1: $\cdot \nabla f(x,y) = \left(\frac{\sin y (x^2+y^2) - 2x^2 \sin y}{(x^2+y^2)^2} , \frac{x \cos y (x^2+y^2) - x \sin y \, 2y}{(x^2+y^2)^2} \right)$

· Stetigkeit: Sei $(x_n, y_n)_n \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Dann gilt

$$\frac{x \sin y}{x^2+y^2} = \frac{\sin x}{2x} \to \frac{1}{2} \quad (x \to 0)$$

$$\neq f(0) \quad \Rightarrow \text{nicht stetig}$$

· part. Abl.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}\left(\frac{(0+t)\sin 0}{(0+t)^2+0^2} - 0 \right) = \lim_{t \to 0+} \frac{0}{t^3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}\left(\frac{0 \cdot \sin(t+0)}{0^2+(t+0)^2} - 0 \right) = \lim_{t \to 0+} \frac{0}{t^3} = 0$$

· totale Abl.: ex. nicht da nicht stetig in $(0,0)$

A 2

Geg. sind die Funktionen $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + \sin z + 42 \\ x + y^2 - y \cos z \end{pmatrix}$, $g(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r \sin\varphi \cos\vartheta \\ r \sin\varphi \sin\vartheta \\ r \cos\varphi \end{pmatrix}$

Berechne Df, Dg in jedem bel. Punkt

Bonus: Gib alle Punkte an, wo Dg nicht invertierbar ist

L2:

a) $Df = \begin{pmatrix} 2x & 1 & \cos z \\ 1 & 2y - \cos z & y \sin z \end{pmatrix}$, $Dg = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\vartheta & r \cos\varphi \cos\vartheta & -r \sin\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & r \cos\varphi \sin\vartheta & r \sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\varphi & -r \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Det} g = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r\cos\varphi\cos\vartheta\, r\sin\varphi\cos\vartheta\cos\varphi + r^3\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+\cos\varphi\, r\cos\varphi\sin\vartheta\, r\sin\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\, r^2\sin\varphi\cos\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta$$

$$= r^2(\cos\varphi\cos^3\vartheta\sin\varphi + \sin^3\varphi\,\cancel{\sin^2\vartheta} + \cos\varphi\,\cancel{\sin^2\vartheta}\cos\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi\,\cancel{\cos^2\vartheta})$$

$$= r^2\sin\varphi(\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi) = r^2\sin\varphi$$

A3

Bestimme lokale, globale Extrema für

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - \cos(y - x^2)$

b) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \operatorname{Im}\left(\frac{x^2 - y^3}{y + 2i}\right)$

$$\frac{(x^2-y^3)(y-2i)}{y^2+4} = \frac{x^2y - y^4}{y^2+4} + i\,\frac{2(y^3-x^2)}{y^2+4}$$

a) $f(x,y) = x^2 - \cos(y - x^2)$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x + \sin(y-x^2)\cdot(-2x),\ \sin(y-x^2))$$

Sei (x,y) ein stationärer Punkt. Dann gilt

$$(0,0) = \nabla f(x,y) = (2x(1-\sin(y-x^2)),\ \sin(y-x^2))$$

$\Rightarrow$ I $\quad 0 = 2x(1-\sin(y-x^2))$

II $\quad 0 = \sin(y-x^2)$

Da $\sin(y-x^2)$ und $1-\sin(y-x^2)$ nicht beide gleichzeitig 0 sein haben alle stationären Pkte die Form: $(0, k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - 2\sin(y-x^2) + 2x\cos(y-x^2) & -2x\cos(y-x^2) \\ -2x\cos(y-x^2) & \cos(y-x^2) \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 f(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 2 - 2\cdot 0 + 0 & 0 \\ 0 & \cos(k\pi) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (0, 2k\pi)$ sind Minima, $(0,(2k+1)\pi)$ sind keine Extremwerte

b) $g(x,y) = \frac{2(y^3-x^2)}{y^2+4}$

$$\Rightarrow \nabla g(x,y) = \left(\frac{-4x}{y^2+4},\ \frac{2y^4+24y^2}{y^4+8y+16}\right) \overset{!}{=} (0,0) \Rightarrow x = 0,\ y = 0$$

$$\Rightarrow D_g(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{keine Extrema}$$

$$\left(\left. \begin{array}{l} \cdot\, g(0,0) = 0 \\ \cdot \text{ Für } y>0: \ g(0,y) = \frac{2y^3}{y^2+4} > 0 \\ \cdot \text{ Für } y<0: \ g(0,y) = \frac{2y^3}{y^2+4} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0) \text{ kein Extrempunkt} \right)$$

A5: Berechne die Richtungsableitungen in Richtung $v_1 = (1,1)^T$, $v_2 = (1,e)^T$ von

$f(x,y) = x^y$, $f:]0,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

L5: $f(x,y) = e^{y \ln x}$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x} e^{y\ln x}, \ \ln x\, e^{y \ln x}\right) = \left(y x^{y-1}, \ x^y \ln x\right)$

$\Rightarrow \partial_{v_1} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v_1 = \left(y x^{y-1}, \ x^y \ln x\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{y-1}\left(y + x \ln x\right)$

$\partial_{v_2} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v_2 = \left(y x^{y-1}, \ x^y \ln x\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} x^{y-1}\left(y + e x \ln x\right)$

A4: Wahr oder Falsch? (3) Fragen + Beweis

a) Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stationär einer Fkt $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, dann hat auch f^2 dort einen stationären Pkt

b) Ist $D^2 f(x_0,y_0)$ indefinit, so ex. ein Extrema in (x_0,y_0)

c) $f \in C^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Df^T = Df$

L4: a) wahr, Sei: x_0 ein stat. Pkt von f, d.h. $\nabla f(x_0) = 0$

$\Rightarrow \nabla f^2(x_0) = \left(\partial_1 f^2(x_0), \ldots, \partial_n f^2(x_0)\right) \overset{\text{Produktregel}}{=} \left(2 \cdot f(x_0) \cdot \underbrace{\partial_1 f(x_0)}_{=0}, \ldots, 2 f(x_0) \underbrace{\partial_n f(x_0)}_{=0}\right) = 0$

b) falsch, siehe $f(x,y) = x^2 - y^2$

c) falsch, siehe g aus A2

Lösungen Anwendungen Differentialrechnung

1. • „$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ist n-mal differenzierbar" ist Voraussetzung nach Satz 8.1.1 ✓

• „$x_0 \in [a,b]$" – x_0 sollte weder a noch b sein X

richtig: $x_0 \in (a,b)$

• „$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist $(n+1)$-mal differenzierbar" X

– reicht auf (a,b) und $(n+1)$-mal nur für Restglied nötig

• „$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ kontraktiv" X

– ist Voraussetzung für Banachschen Fixpunktsatz

2. a) $T_1(\sin(x), 0)(x) = \sin(0) + \cos(0) \cdot x$

$= 0 + x$

$\to T_1(\sin(x), 0)(1) = 1$

$T_3(\sin(x), 0)(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{1}{2}\sin(0)x^2 - \frac{1}{6}\cos(0)x^3$

$= 0 + x - 0 - \frac{1}{6}x^3$

$\Rightarrow T_3(\sin(x), 0)(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

[Restglied in Integraldarstellung gibt keine neuen Infos:]

$R_1(x,0) = \sin(1) - 1$

$R_3(x,0) = \sin(1) - \frac{5}{6}$

Mit Lagrange-Form $\exists\, \xi$ zwischen $(0,1)$ so,

dass $\left|R_1(1,0)\right| = \left|\frac{-\sin(\xi)}{2}\right| < \left|\frac{\sin(1)}{2}\right|$

und $\left|R_3(1,0)\right| = \left|\frac{\sin(\xi)}{24}\right| < \left|\frac{\sin(1)}{24}\right|$

b) Taylorreihe von $f: (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ in $x_0 = 0$

Zuerst Berechnung einiger Ableitungen um eine allgemeine Vorschrift zu finden:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f''''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \end{aligned}\right\} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

für $n = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow T(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k! \cdot 1^k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

EXTRA:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ f''(x) &= (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= -\frac{6x}{2\sqrt{(x^2+1)^5}} \end{aligned}\right\} \quad T_3(f,0)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$$

$$= 1 + 0 + \frac{1}{2}x^2 + 0$$

$$= \underline{\underline{1 + \frac{x^2}{2}}}$$

3 a) $f(x) = x^2 + x - 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	-1	-3	-3	-1	3

Interessante Intervalle: $[1,2]$ und $[-3,-2]$

$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ✓

$f''(x) = 2 \geq 0 \quad \forall x$ ✓

Wähle Startpunkt x_0 mit $f(x_0) \geq 0$: $x_0 = 2$

$x_1 = 2 - \frac{3}{5} = 1{,}4$

$x_2 = 1{,}4 - \frac{0{,}36}{3{,}8} = 1{,}305263158$

$x_3 = 1{,}3052631579 - 0{,}002485806 35$

$= 1{,}302777735155$

$\Rightarrow \xi_1 \approx 1{,}3$

Tatsächlich ist 1,3 sogar genau die Nullstelle, da war meine Fkt. nicht so super schlau. :)

Zweite Nullstelle gleicher Weg mit

x_0 z.B. -3 oder da f symm. um $x = -0{,}5$

muss $\xi_2 = -2{,}3$ sein :)

b) $\sqrt{5}$ ist NST ξ von $f(x) = x^2 - 5$

x	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	4

$f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ✓

$f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x$ ✓

Wähle $x_0 = 3$

$x_1 = 3 - \frac{4}{6} = 2{,}\overline{33}$

$x_2 = 2{,}\overline{33} - 0{,}\overline{095238} \approx 2{,}2380952$

Man könnte nun weiter machen, aber ich behaupte mit Satz 8.3.1. 3) ist der Fehler

$|\sqrt{5} - 2{,}2380952| \leq \frac{2}{8} |2{,}2380952 - 2{,}\overline{33}|^2$

$\leq \frac{1}{4} \cdot 0{,}0907 \leq 0{,}002268$,

d.h. x_2 ist auf 2 Nachkommastellen genau

$\underline{\underline{\sqrt{5} \approx 2{,}238}}$

4 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}(\arctan^2(x) + 1)$

besitzt auf $[0,1]$ genau einen Fixpunkt.

Um das zu beweisen benötigen wir Kontraktivität.

Zeigen wir mit Schrankensatz (10.1.3):

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\arctan^2(x)} \cdot 2 \cdot \arctan(x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf $[0,1]$ stetig und damit ($[0,1]$ natürlich kompakt & konvex) sind alle Voraussetzungen erfüllt:

$$\max_{z\in[0,1]} |f'(z)| \le \left| \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\arctan^2(0)} \cdot 2 \cdot \arctan(1) \cdot \frac{1}{1+0^2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 \right| = \left| \frac{\pi}{8} \right| < 1$$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\pi}{8} |x-y|$ (Kontraktivität)

$\Rightarrow f$ besitzt auf $[0,1]$ genau einen Fixpunkt.

5 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$

i) Nicht injektiv, da $f(-1,-1) = (2,0) = f(1,1)$

ii) Beh. f ist überall auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ lokal umkehrbar.

Da f_1 & f_2 stetig differenzierbar, ist auch f.

Jacobi-Matrix: $f'(x) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$

$\det(f'(x)) = 4y^2 + 4x^2 \neq 0 \quad \forall (x,y) \in D$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes (10.1.4) erfüllt und f ist auf D überall lokal umkehrbar.